6.1.

úterý 12. ledna 2021 20:08

1. (d) taková funkce existuje, konkrétní předpis by mohl být třeba

$$f(x) = e^{-x} \cdot \cos \frac{1}{x}$$

platí $|f(x)| < 1$, $x \in (0,3]$ a zároveň pro

$x_n = \frac{1}{2k\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2k+1)\pi} \in (0,3]$, $k \in \mathbb{N}$

platí $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = 1$ a $\lim\limits_{k \to \infty} f(y_k) = -1$

tedy $\sup\limits_{x \in (0,3]} f(x) = 1$ a $\inf\limits_{x \in (0,3]} f(x) = -1$

(2) (b) D^* má dělicí body $0, 1, 4, 7, 10$ (označme $X_0, \dots, X_4$)

tedy $|D^*| = \max\limits_{k=0,\dots,3} (X_{k+1} - X_k) = \max\{1, 3, 3, 3\} = 3$

D^{**} má dělicí body $0, 2, 4, 6, 8, 10$ (označme $Y_0, \dots, Y_5$)

tedy $|D^{**}| = 2$

(c) Označme D dělení s dělícími body $0, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10$. Potom $D \in \mathcal{D}$ a $|D| = 2$.

Zároveň platí, že každé $D' \in \mathcal{D}$ je zjemněním D.

Označme ještě $\bar{D}$ dělení $[0, 10]$ s dělícími body $\frac{k}{2}$, $k = 0, \dots, 20$. Potom $\bar{D} \in \mathcal{D}$ a $|\bar{D}| = \frac{1}{2}$.

(i) neplatí, protože $\bar{D} \in \mathcal{D}$

(ii) neplatí, protože $D \in \mathcal{D}$

(iii) neplatí, protože $\bar{D} \in \mathcal{D}$

(iv) platí, protože dělící body každého $D' \in \mathcal{D}$ musí obsahovat dělící body D^{**} a tedy $|D'| \leq |D^{**}| = 2$

(v) není možné podle (iv)

(3) (c) arctan je konkávní na $[0,\infty)$, podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\arctan(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \geq \lambda_1 \arctan(x_1) + \lambda_2 \arctan(x_2) + \lambda_3 \arctan(x_3)$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

Pro $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ pak platí

$$\arctan\left(\frac{7}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\arctan 1 + \frac{1}{3}\arctan 2 + \frac{1}{3}\arctan 4,$$

což nám stačí.

(d) Taková funkce existuje, např. $f(x) = x$.